Title	The Zbaganu constant of absolute normalized spaces (Mathematical Studies on Independence and Dependence Structure : A Functional Analytic Point of View)
Author(s)	水口, 洋康; 斎藤, 吉助
Citation	数理解析研究所講究録 (2012), 1819: 103-110
Issue Date	2012-12
URL	http://hdl.handle.net/2433/194627
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第 1819 巻 2012 年 103-110

The Zbăganu constant of absolute normalized spaces

新潟大学大学院自然科学研究科 水口 洋康 (Hiroyasu Mizuguchi)
Graduate School of Science and Technology, Niigata University
新潟大学理学部 斎藤 吉助 (Kichi-Suke Saito)
Faculty of Science, Niigata University

1 .Introduction

Banach 空間において von Neumann-Jordan 定数や James 定数など様々な Banach 空間の幾何学的定数が存在する. これらは Banach 空間の幾何学的構造を調べる上で重要であり, 不動点理論などに関連して急速な発展を遂げている.

X を Banach 空間, $S_X = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ を X の単位球面とする. Jordan - von Neumann([7]) は 1935 年, 内積空間を中線定理を満たすノルム空間として特徴付けた論文の中で, 任意の Banach 空間 X に対して

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)} \leq 2, \quad {}^\forall x, y \in X, \ (x,y) \neq (0,0)$$

となることを注意している. このことに関連し Clarkson ([4]) は 1937 年に Banach 空間の丸さの度合いを表す次の概念を導入した.

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)} \leq C, \quad {}^\forall x, y \in X, \ (x,y) \neq (0,0)$$

を満たす C の最小値を von Neumann-Jordan (NJ) constant といい, $C_{NJ}(X)$ と表記する. Jordan - von Neumann の指摘から $1 \leq C_{NJ}(X) \leq 2$ であり, 中線定理が内積空間を特徴づけることから $C_{NJ}(X) = 1 \Leftrightarrow X$: Hilbert 空間 である. 又, $C_{NJ}(X) < 2 \Leftrightarrow X$: uniformly non-square (UNS) であることもよく知られている. ここで X が uniformly non-square (UNS) であるとは, ある $\delta > 0$ が存在し $\|x-y\| > 2(1-\delta)$, $x, y \in S_X$ ならば $\|x+y\| \leq 2(1-\delta)$ であることを言う.

Clarkson は Clarkson の不等式を用いて L_p 空間の NJ constant を求め, 斎藤-加藤-高橋 ([9]) は $\mathbb{C}^2$ 上 absolute normalized norm の NJ constant の値を計算, 評価した. 他にもこの定数に関し多くのことが研究されている ([1, 8, 12] 他多数).

更に, 近年 NJ constant に近い形をした定数が数多く定義, 研究されている. Zbăganu は次を定義した.

Definition 1.1. ([13]) Banach 空間 X に対し, X の Zbăganu constant $C_Z(X)$ を

$$C_Z(X) = \sup\left\{ \frac{\|x+y\|\|x-y\|}{\|x\|^2+\|y\|^2} \;\middle|\; x, y \in X \ , \ (x,y) \neq (0,0) \right\}$$

で定義する.

この定数について, [9] に倣い $\mathbb{R}^2$ 上 absolute normalized norm の値について幾つかの結果を得たので, ここで述べる.

2 .Preliminaries

Banach 空間 X に対し

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2}{2(\|x\|^2+\|y\|^2)} \leq C, \ \ {}^\forall x, y \in X, \ (x,y) \neq (0,0)$$

を満たす C の最小値を von Neumann-Jordan (NJ) constant といい, $C_{NJ}(X)$ と表記する. すなわち,

$$C_{NJ}(X) = \sup\left\{ \frac{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2}{2(\|x\|^2+\|y\|^2)} \;\middle|\; x, y \in X \ , \ (x,y) \neq (0,0) \right\}$$

である.

$$C_{NJ}(X) = \sup\left\{ \frac{\|x+ty\|^2+\|x-ty\|^2}{2(1+t^2)} \;\middle|\; x, y \in S_X, \ 0 \leq t \leq 1 \right\}$$

の形で扱われることも多い.

一方

$$C_Z(X) = \sup\left\{ \frac{\|x+y\|\|x-y\|}{\|x\|^2+\|y\|^2} \;\middle|\; x, y \in X \ , \ (x,y) \neq (0,0) \right\}$$

であるが, 任意の $x, y \in X$ に対し,

$$\frac{\|x+y\|\|x-y\|}{\|x\|^2+\|y\|^2} \leq \frac{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2}{2(\|x\|^2+\|y\|^2)} \leq 2$$

であり, $y=0$ とすると

$$\frac{\|x+y\|\|x-y\|}{\|x\|^2+\|y\|^2} = \frac{\|x\|^2}{\|x\|^2} = 1$$

であるため, $1 \leq C_Z(X) \leq C_{NJ}(X) \leq 2$ である.

また任意の $x,y\in X$ に対し $\|x+y\|\|x-y\|\le\|x\|^2+\|y\|^2$ が成り立つとき, 任意の $u,v\in S_X$ に対し $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2\ge 4$ であるが, このことは内積空間の特徴付けになっている ([5, 11]) ので NJ constant 同様, $C_Z(X)=1\Leftrightarrow X$: Hilbert 空間が成立する. 更に $C_Z(X)<2\Leftrightarrow X$: uniformly non-square (UNS) であることも知られている.

このような NJ constant と共通した性質に加えて, L_p 空間, l_p 空間などに対しても 2 つの定数の値が等しいことなどから Zbăganu は任意のノルム空間においてこの定数は NJ constant と等しくなると予想した.

Example 2.1. (Zbăganu の予想に対する反例, [2])
$\mathbb{R}^2$ に次のノルム

$$\|(x_1,x_2)\|=\begin{cases}\max\{|x_1|,|x_2|\} & (x_1x_2\ge 0)\\ |x_1|+|x_2| & (x_1x_2\le 0)\end{cases}$$

を与えた空間を X とする. このとき

$$C_Z(X)=\frac{5}{4}<\frac{3+\sqrt{5}}{4}=C_{NJ}(X)$$

が得られる.

$\mathbb{C}^2$ (or $\mathbb{R}^2$) 上のノルム $\|\cdot\|$ が absolute であるとは, 任意の $z,w\in\mathbb{C}$ (or $\mathbb{R}$) に対して $\|(z,w)\|=\|(|z|,|w|)\|$ が成立するときを言う. また, $\|\cdot\|$ が normalized であるとは $\|(1,0)\|=\|(0,1)\|=1$ を言う. 例えば, l_p-ノルムは absolute normalized である.

$$\|(z,w)\|_p=\begin{cases}(|z|^p+|w|^p)^{\frac{1}{p}} & (1\le p<\infty),\\ \\ \max(|z|,|w|) & (p=\infty).\end{cases}$$

AN_2 を $\mathbb{C}^2$ 上の absolute normalized ノルム全体とする. 任意の $\|\cdot\|\in AN_2$ に対して

$$\psi(t)=\|(1-t,t)\|\ (0\le t\le 1)$$

とおく. このとき ψ は [0,1] 上の連続凸関数で $\psi(0)=\psi(1)=1$ かつ $\max(1-t,t)\le\psi(t)\le 1$ を満たす. このような性質を満たす関数の全体を Ψ_2 とする. 任意の $\psi\in\Psi_2$ に対して

$$\|(z,w)\|_\psi=\begin{cases}(|z|+|w|)\psi(\frac{|w|}{|z|+|w|}) & ((z,w)\ne(0,0))\\ \\ 0 & ((z,w)=(0,0))\end{cases}$$

とおくと $\|\cdot\|_\psi\in AN_2$ かつ $\psi(t)=\|(1-t,t)\|_\psi$ $(0\le t\le 1)$ を満たす. 従って AN_2 と Ψ_2 は 1 対 1 に対応する ([3, 10]).

任意の $0 \leq t \leq 1$ で $\psi(t) = \psi(1-t)$ が成り立つとき, ψ は $t = 1/2$ で対称であるという. Ψ_2 に含まれる2つの関数 ψ, φ について, 任意の $0 \leq t \leq 1$ で $\psi(t) \leq \varphi(t)$ が成立するとき $\psi \leq \varphi$ と表す. また,

$$\psi_2(t) = \|(1-t,t)\|_2 = \sqrt{(1-t)^2 + t^2}, \quad M_1 = \max_{0 \leq t \leq 1} \frac{\psi(t)}{\psi_2(t)}, \quad M_2 = \max_{0 \leq t \leq 1} \frac{\psi_2(t)}{\psi(t)}$$

と表す事とする. 斎藤-加藤-高橋は $\mathbb{C}^2$ 上の absolute normalized ノルム に対して NJ constant を次のように計算した.

Theorem 2.2. ([9]) $\psi \in \Psi_2$ とする
(i) $\psi \geq \psi_2$ (resp. $\psi \leq \psi_2$) のとき $C_{NJ}(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi) = M_1^2$ (resp. M_2^2).
(ii) ψ が $t = 1/2$ で対称で, $M_1 = \dfrac{\psi(1/2)}{\psi_2(1/2)}$ または $M_2 = \dfrac{\psi_2(1/2)}{\psi(1/2)}$ とする. このとき $C_{NJ}(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi) = M_1^2 M_2^2$.

3 . Results

Theorem 2.2 に倣い $\mathbb{R}^2$ 上の absolute normalized ノルムに対する Zbăganu constant の値について考える.

なお, $x, y \in X$ に対し $u = x + y$, $v = x - y$ とおくことで

$$\frac{\|x+y\|\|x-y\|}{\|x\|^2 + \|y\|^2} = \frac{4\|u\|\|v\|}{\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2}$$

となることから

$$C_Z(X) = \sup\left\{ \frac{4\|x\|\|y\|}{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2} \;\middle|\; x, y \in X \ , \ (x,y) \neq (0,0) \right\}$$

の形に書き換え可能であること, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ において NJ constant 及び Zbăganu constant は最大値として与えられる事に注意が必要であり, 以下の結果を得るためにこれらの事柄を利用した.

まず ψ が ψ_2 と比較可能 ($\psi \geq \psi_2$ または $\psi \leq \psi_2$) である場合について考える. Theorem 2.2 (i) から既に, $\psi \geq \psi_2$ (resp. $\psi \leq \psi_2$) のとき $C_Z(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi) \leq M_1^2$ (resp. M_2^2) であることは自明である.

Proposition 3.1. $\psi \in \Psi_2$ とする. $\psi \geq \psi_2$ のとき $C_Z(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi) = M_1^2$.

Theorem 3.2. $\psi \in \Psi_2$, $\psi \leq \psi_2$ とする. このとき $C_Z\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi) = M_2^2$ であることは, 条件 (1) 又は (2) を満たす $0 \leq s < t \leq 1$ が存在することと同値である.

(1) $\psi(s) = \psi_2(s)$, $\psi(t) = \psi_2(t)$ で,

$$r = \frac{\psi(s)t + \psi(t)s}{\psi(s) + \psi(t)} \text{ とおくと } \frac{\psi_2(r)}{\psi(r)} = \frac{\psi_2(1-r)}{\psi(1-r)} = M_2 \text{を満たす.}$$

(2) $\psi(s) = \psi_2(s)$, $\psi(t) = \psi_2(t)$ で,

$$r = \frac{\psi(s)t + \psi(t)s}{(1-2t)\psi(s) + \psi(t)} \text{ とおくと } \frac{\psi_2(r)}{\psi(r)} = \frac{\psi_2(1-r)}{\psi(1-r)} = M_2 \text{を満たす.}$$

次に, 上記の結果を基に一般の場合について考える. Theorem 2.2 (ii) から既に, $\psi(t)$ が $t = 1/2$ で対称で, $M_1 = \dfrac{\psi(1/2)}{\psi_2(1/2)}$ または $M_2 = \dfrac{\psi_2(1/2)}{\psi(1/2)}$ を満たすとき $C_Z(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi) \leq M_1^2 M_2^2$ である事は自明である.

Proposition 3.3. $\psi \in \Psi_2$ とする. $\psi(t)$ が $t = 1/2$ で対称で, かつ $M_2 = \dfrac{\psi_2(1/2)}{\psi(1/2)}$ とする. このとき $C_Z(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi) = M_1^2 M_2^2$.

Theorem 3.4. $\psi \in \Psi_2$ とする. $\psi(t)$ が $t = 1/2$ で対称, $M_1 = \dfrac{\psi(1/2)}{\psi_2(1/2)}$, 更に $M_2 > 1$ とする. このとき $C_Z(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi) = M_1^2 M_2^2$ であることは, 条件 (1) 又は (2) を満たす $0 \leq s < t \leq 1$ が存在することと同値である.

(1) $\dfrac{\psi(s)}{\psi_2(s)} = \dfrac{\psi(t)}{\psi_2(t)} = M_1$ で $r = \dfrac{\psi(s)t + \psi(t)s}{\psi(s) + \psi(t)}$ とおくと $\dfrac{\psi_2(r)}{\psi(r)} = M_2$ を満たす.

(2) $\dfrac{\psi(s)}{\psi_2(s)} = \dfrac{\psi(t)}{\psi_2(t)} = M_1$ で $r = \dfrac{\psi(s)t + \psi(t)s}{(1-2t)\psi(s) + \psi(t)}$ とおくと $\dfrac{\psi_2(r)}{\psi(r)} = M_2$ を満たす.

上記の 4 つの結果は $\mathbb{R}^2$ 上の absolute normalized ノルムについてであるが, $\mathbb{C}^2$ については次の事が成り立つ.

Remark 3.5. $\mathbb{R}^2$ が $\mathbb{C}^2$ に含まれるため, 任意の $\psi \in \Psi_2$ に対して $C_Z(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi) \leq C_Z(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi)$ である. よって $C_Z(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi) = C_{NJ}(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi)$ が成り立つとき,

$$C_{NJ}(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi) = C_Z(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi) \leq C_Z(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi) \leq C_{NJ}(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi)$$

から $C_Z(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi)$ もまた $C_{NJ}(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi)$ と等しい事が分かる.

4 . Examples

Example 4.1.

$$\psi(t)=\max\left\{t,\ 1-t,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

という関数を考えると $\psi\le\psi_2$ であり，

$$\|(z,w)\|_\psi=\max\{\|(z,w)\|_\infty,\sqrt{2}\|(z,w)\|_1\}$$

である．又 $t=0,1/2,1$ で $\psi(t)=\psi_2(t)$ となり，$\dfrac{\psi_2}{\psi}$ は $t=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で最大値をとるが，$s=0,\ t=1/2$ に対して

$$r=\frac{\psi(s)t+\psi(t)s}{\psi(s)+\psi(t)}=\frac{1\cdot(1/2)}{1+1/\sqrt{2}}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

であるため，$s=0,\ t=1/2$ が Theorem 3.2 の条件 (1) を満たすので $C_Z(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_\psi)=C_{NJ}(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_\psi)=M_2^2=2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$ となる．

更に，この ψ から

$$\varphi(t)=\begin{cases}\psi_2(t) & \left(0\le t\le\dfrac{1}{2}\right)\\[2mm] \psi(t) & \left(\dfrac{1}{2}\le t\le 1\right)\end{cases}$$

という関数 φ を考えると $\varphi\le\psi_2$ であるが，Theorem 3.2 の条件 (1) 又は (2) を満たす $0\le s<t\le 1$ は存在しないので，$C_Z(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_\varphi)<2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=C_{NJ}(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_\varphi)$ となり Zbăganu の予想に対する反例となる．

Example 4.2. $1/\sqrt{2}\le\beta<1$ に対して，

$$\psi_\beta(t)=\max\{t,\ 1-t,\ \beta\}$$

とすると ψ_β と ψ_2 は交わる．
この ψ_β は $t=1/2$ で対称であり，$\dfrac{\psi_2}{\psi_\beta}$ は $t=\beta$ で最大値 $\dfrac{\{\beta^2+(1-\beta 2)^2\}^{\frac{1}{2}}}{\beta}$ を，$\dfrac{\psi_\beta}{\psi_2}$ は $t=1/2$ で最大値 $\sqrt{2}\beta$ をとるが，$s=1-\beta, t=\beta$ とおくと

$$r=\frac{\psi(s)t+\psi(t)s}{\psi(s)+\psi(t)}=\frac{\beta\cdot\psi_\beta(1-\beta)+(1-\beta)\cdot\psi_\beta(\beta)}{\psi_\beta(\beta)+\psi_\beta(\beta)}=\frac{\psi_\beta(\beta)}{2\psi_\beta(\beta)}=\frac{1}{2}$$

であるため $s,\ t$ は Theorem 3.4 の条件 (1) を満たす事が分かる．従って $C_Z(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_{\psi_\beta})=C_{NJ}(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_{\psi_\beta})=M_1^2M_2^2=2\{\beta^2+(1-\beta)^2\}$ となる．

参考文献

[1] J. Alonso, P. Martin and, P. L. Papini, Wheeling around von Neumann-Jordan constant in Banach Spaces, Studia Math., 188(2008), 135-150.

[2] J. Alonso and, P. Martin, A counterexample for a conjecture of G. Zbăganu about the Neumann-Jordan constant, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 51(2006), 135-141.

[3] F. F. Bonsall and J. Duncan, Numerical Ranges II, London Math. Soc. Lecture Note Series, Vol.10, 1973.

[4] J. A. Clarkson, The von Neumann-Jordan constant for the Lebesgue spaces, Ann. Math., 38(1937), 114-115..

[5] M. M. Day, Some characterizations of inner-product spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 62(1947), 320-337.

[6] E. Llorens-Fuster, E. M. Mazcuñán-Navarro and, S. Reich, The Ptolemy and Zbăganu constants of normed spaces. Nonlinear Anal., 72(2010), no. 11, 3984-3993

[7] P. Jordan and J. von Neumann, On inner products in linear metric spaces, Ann. Math., 36(1935), 719-723.

[8] M. Kato and Y. Takahashi, On sharp estimates concerning von Neumann-Jordan and James constants for a Banach space, rendiconti del circolo matematico di palermo Serie II, suppl., 82(2010), 1-17.

[9] K. -S. Saito, M. Kato and,Y. Takahashi, Von Neumann-Jordan constant of abusolute normalized norms on $\mathbb{C}^2$, J. Math. Anal. Appl., 244(2000), 515-532.

[10] K. -S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, Absolute norms on $\mathbb{C}^n$, J. Math. Anal. Appl., 252(2000), 879-905.

[11] I. J. Schoenberg, A remark on M. M. Day's characterization of inner-product spaces and a conjecture of L. M. Blumenthal, Proc. Amer. Math. Soc., 3 (1952), 961-964.

[12] Y. Takahashi and M. Kato, A simple inequality for the von Neumann-Jordan and James constants of a Banach space, J. Math. Anal. Appl., 359(2009), 602–609.

[13] G. Zbăganu, An inequality of M. Rădulescu and S. Rădulescu which characterizes inner product spaces, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 47(2001), 253-257.